



Messwerte  
verarbeiten

Armin Rohnen

# Messwerte verarbeiten

Armin Rohnen

Hochschule München FK03, Labor für Schwingungstechnik und  
Maschinendynamik

armini gbr, [schwingungsanalyse.com](https://schwingungsanalyse.com)

February 10, 2024





# Inhalt

Messwerte  
verarbeiten

Armin Rohnen

Inhaltsverzeichnis

- ➊ Digitalisierung von Signalen
- ➋ Signalanalyse im Zeitbereich
- ➌ Zählverfahren und Statistik
- ➍ Grundlagen der Fouriertransformation
- ➎ Das Spektrum an Spektren
- ➏ Drehzahl
- ➐ Ordnungsanalyse (Ordertracking)
- ➑ Quellen



# Messkette

Digitalisierung  
von Signalen

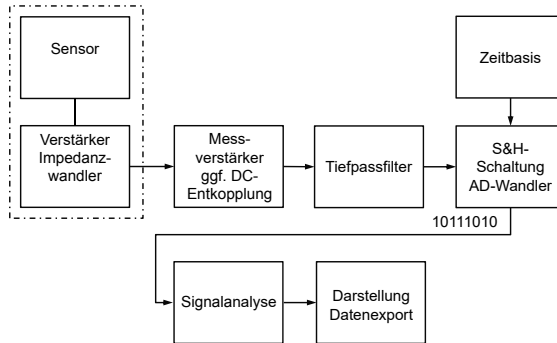
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse





# Messkette

Digitalisierung  
von Signalen

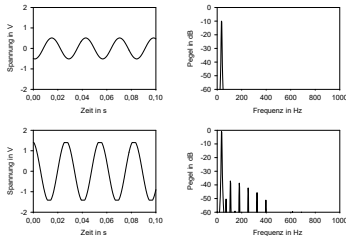
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse



- Messverstärker im mittleren Bereich betreiben
- Übersteuerung führt zu zusätzlichen Linien im Frequenzspektrum





# Messkette

Digitalisierung  
von Signalen

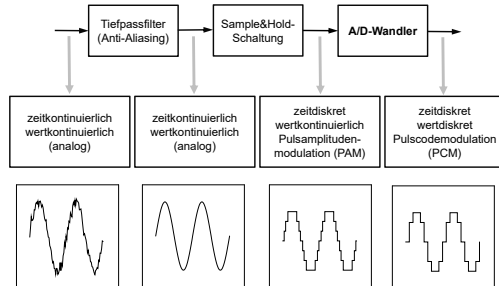
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse





# Messkette

Digitalisierung  
von Signalen

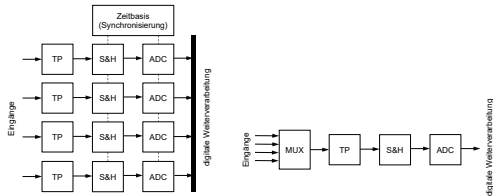
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse



(links) Je Kanal ein Verstärker, S&H, AD-Wandler. Dadurch parallel und taktssynchron (abtastsynchron)

(rechts) Multiplexbetrieb: Nacheinander abgetastete Kanäle, preiswerte Messtechnik, Übersprechen und

Phasenversatz zwischen den Kanälen, Abtastrate teilt sich auf die Kanäle auf



# Abtasttheorem

Digitalisierung  
von Signalen

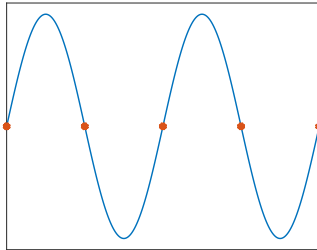
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse



- (kontinuierliches) analoges Signal in ein digitales Signal umwandeln
- ohne Informationsverlust
- mindestens mit der doppelten Höchsfrequenz abtasten



# Aliasing

Digitalisierung  
von Signalen

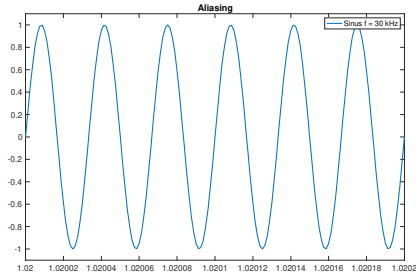
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse



- Sinussignal mit  $f = 30 \text{ kHz}$
- Abtastrate  $f_s = 80 \text{ kHz}$



# Aliasing

Digitalisierung  
von Signalen

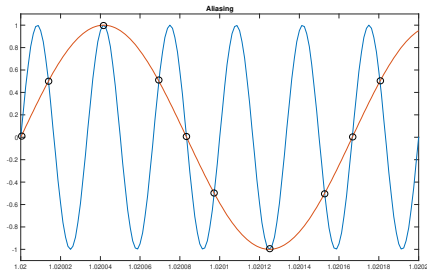
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse



- Sinussignal (blau) mit  $f = 30 \text{ kHz}$
- Abtastrate  $f_s = 24 \text{ kHz}$
- (scheinbares) Sinussignal (rot) mit  $f = 6 \text{ kHz}$



# Aliasing

Digitalisierung  
von Signalen

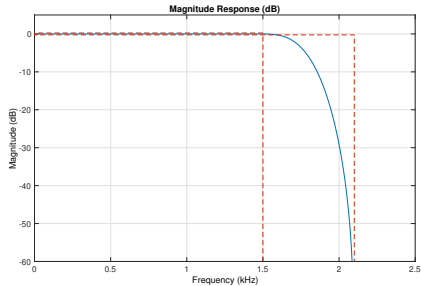
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse



- Tiefpassfilter mit  $f_E = f_s/2$
- Grenzfrequenz bei  $-3$  dB Filterwirkung
- filterabhängiger Bereich  $f_{max} \dots f_O$  unbrauchbar



# Messung von Impulsen

Digitalisierung  
von Signalen

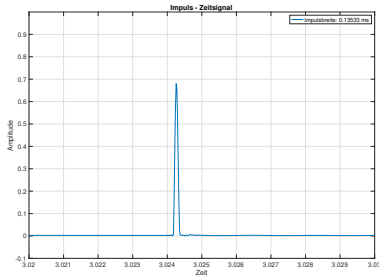
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse



- Impuls - Hammerschlag
- nahe am idealen Impuls, dem Dirac
- Abtastrate  $f_s = 51,2 \text{ kHz}$
- ermittelte Impulsbreite  $t_{\text{Impact}} = 0,13533 \text{ ms}$
- Impulshöhe  $U_{\text{Impact}} = 680,0767 \text{ mV}$



# Messung von Impulsen

Digitalisierung  
von Signalen

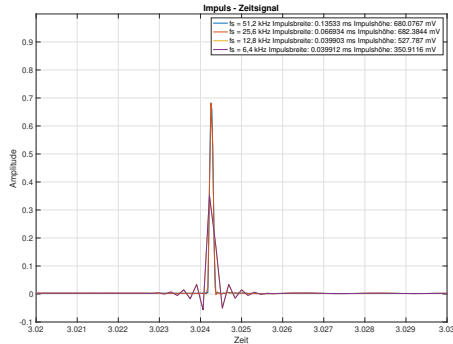
Armin Rohnen

Messkette

Abtasttheorem

Aliasing

Impulse



- niedrige Abtastraten suggerieren kürzere Impulszeiten
- niedrige Abtastraten suggerieren niedrigere Amplituden
- für korrekte Werte hohe Abtastraten erforderlich





# Spitzenwert

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

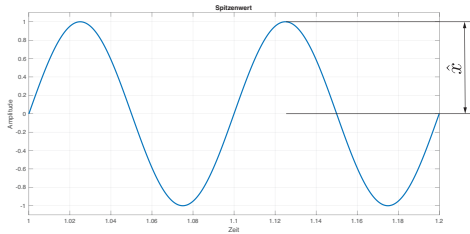
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor



- kontinuierlicher Sinus ohne Amplitudenänderung
- $\hat{x}$  = Amplitude
- MATLAB®:  $x = \max(\text{abs}(\text{signal}))$ ;



# MATLAB® - Spitzenwert

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor

```
laenge = 10;  
fs = 40000;  
f = 10;  
N = ceil(laenge * fs);  
time = (0 : (N - 1))/fs;  
Amplitude = 1;  
signal = sin(2 * pi * f * time) * Amplitude;  
plot(time, signal, 'LineWidth', 2)  
axis([1 1.2 (-1) * Amplitude - 0.1 Amplitude + 0.1])  
set(gca, 'xgrid', 'on')  
set(gca, 'ygrid', 'on')  
set(gca, 'FontSize', 16)  
title('Spitzenwert')  
ylabel('Amplitude')  
xlabel('Zeit')
```



# Spitzenwert - Signalverlauf

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

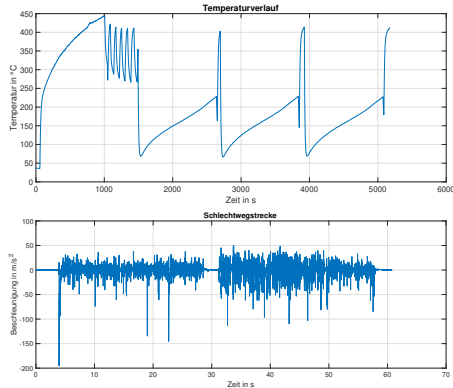
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor



- andere Definition erforderlich
- Maximalwert in einem Intervall  $\tau$
- fast  $\tau = 125 \text{ ms}$
- slow  $\tau = 1000 \text{ ms}$



# Spitzenwert - Signalverlauf

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

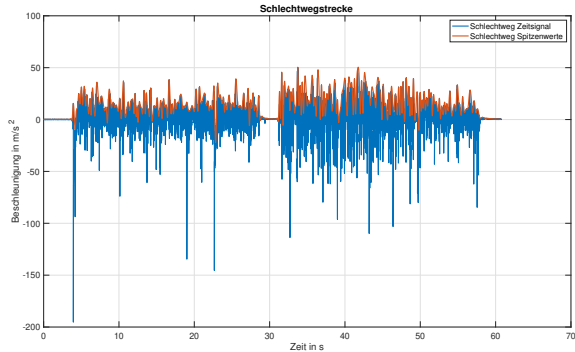
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor



```
fs = 1/(schlechtwegZeit(100,1) - schlechtwegZeit(99,1));  
wl = ceil(fs * 0.125);  
[schlechtwegSpitzenwert, ~] = envelope(schlechtwegDaten, wl, 'peak');
```



# Signalmittelwert

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

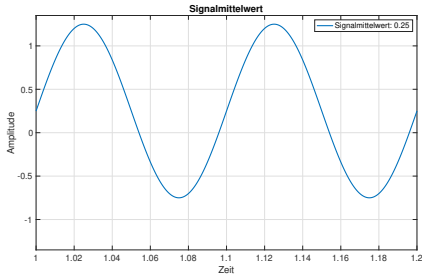
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor



- $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_0^T x(t) \Delta t$
- eigentlich  $\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$
- Mittelwert des Sinussignals üblich  $\bar{x} = 0$
- realer Mittelwert des Sinussignals = Gleichanteil
- MATLAB®: `mean(signal)`



# Effektivwert

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

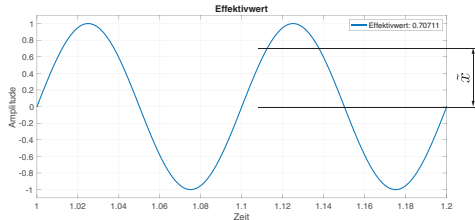
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor



$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_0^T x^2(t) \Delta t}$$

$$\bullet \text{ Effektivwert einer Sinusschwingung } \tilde{x} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \text{ MATLAB®: rms(signal)}$$



# Effektivwert - Signalverlauf

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

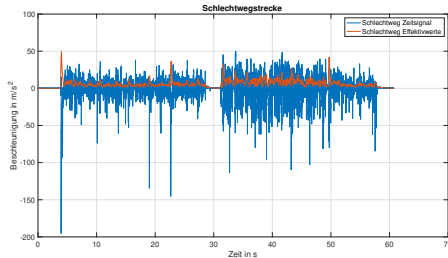
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor



```
fs = 1/(schlechtwegZeit(100, 1) - schlechtwegZeit(99, 1));  
wl = ceil(fs * 0.125);  
[schlechtwegRMS, ~] = envelope(schlechtwegDaten, wl, 'rms');
```



# Pegelmessgerät - gleitender Effektivwert

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

Pegelmessgerät

Autokorrelation

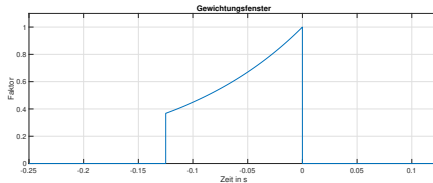
Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor

$$\tilde{x}_r(t) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_{\xi=0}^t e^{\frac{-(t-\xi)}{\tau}} x^2(\xi) d\xi}$$

- gewichtete Einzelwerte im Gesamtergebnis
- zeitliche Bewertung mittels Exponentialfunktion
- Gewichtung umso geringer, je länger der Einzelwert zurückliegt
- Einzelwert entspricht  $\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) \Delta t}$  mit gewichteten  $x^2(t)$







# Pegelmessgerät - Algorithmus gleitender Effektivwert

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor

- Gewichtungsfenster berechnen  
 $fs = 1 / (\text{schlechtwegZeit}(100, 1) - \text{schlechtwegZeit}(99, 1));$   
 $\tau = 0.125;$   
 $wl = \text{ceil}(fs * \tau);$   
 $\text{for } xi = 1 : wl$   
 $\quad w(xi, 1) = \exp((-1) * (wl - xi) / wl);$   
 $\text{end}$
- Signal quadrieren  
 $\text{signal} = \text{schlechtwegDaten}.^2;$
- Berechnung bis  $t = \tau$   
 $\text{for } xi = 1 : wl$   
 $\quad \text{gleitenderEffektivwert}(xi, 1) = \text{sqrt}((\text{sum}(w(wl - xi + 1 : wl, 1) .* \text{signal}(wl - xi + 1 : wl, 1))) / xi);$   
 $\text{end}$



# Pegelmessgerät - Algorithmus gleitender Effektivwert

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

Pegelmessgerät

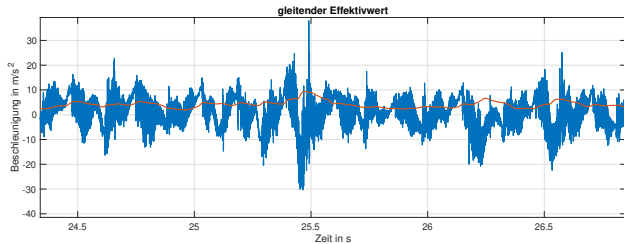
Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor

- Berechnung ab  $t = \tau$   
*for*  $xi = wl + 1 : \text{length}(\text{signal})$   
     $\text{gleitenderEffektivwert}(xi, 1) = \text{sqrt}(\text{sum}(w. * \text{signal}(xi - wl + 1 : xi, 1))/wl);$   
*end*
- Berechnung ist Zeitaufwändig





# Pegelmessgerät - Datenreduktion

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor

- Zeitabstand festlegen  $dt = 0.1$ ; (Verlaufsauflösung)
- Sprungweite berechnen  $step = \text{ceil}(fs * dt)$ ;
- Berechnung

```
punkt = 0;
if step < wl
    punkt = punkt + 1;
    time(punkt, 1) = schlechtwegZeit(step, 1);
    Effektivwert(punkt, 1) = sqrt((sum(w(wl - step + 1 : wl, 1) .* signal(wl - step + 1 : wl, 1)))/xi);
end
for xi = 2 * step : step : length(signal)
    punkt = punkt + 1;
    time(punkt, 1) = schlechtwegZeit(xi, 1);
    Effektivwert(punkt, 1) = sqrt(sum(w .* signal(xi - wl + 1 : xi, 1))/wl);
end
```



# Pegelmessgerät - Datenreduktion

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

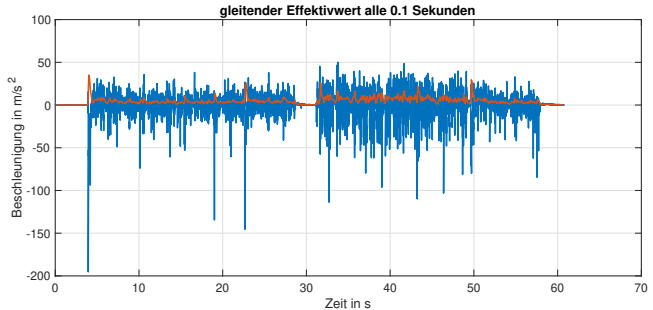
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor





# Pegelmessgerät - Datenreduktion

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

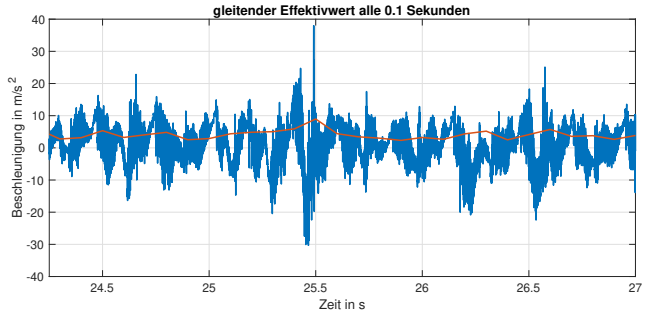
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor





# Autokorrelation

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt$$

- Begriff aus der Stochastik und der Signalverarbeitung
- Beschreibt die Ähnlichkeit eines Signals mit sich selbst
- Wieviel Ähnlichkeit hat der um die Zeit  $\tau$  verschobene Signalwert  $x(t + \tau)$  mit dem ursprünglichen Signalwert  $x(t)$
- Berechnung  
 $[R_{xx}, \tau] = \text{xcorr}(x, 'normalized');$   
 $R_{xx} = R_{xx}(\tau > 0);$   
 $\tau = \tau(\tau > 0);$   
 $[R_{xx}, lo] = \text{envelope}(R_{xx}, 50, 'peak');$



# Autokorrelation

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

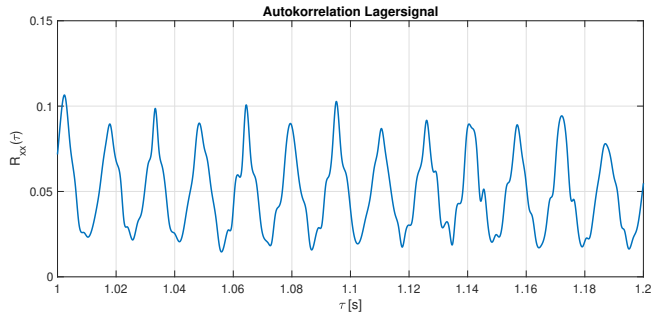
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor



- Abstand der Maxima = Wiederholungszeit
- hier Drehzahl mit  $n = 4030 \text{ min}^{-1}$



# Kreuzkorrelation

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

Pegelmessgerät

Autokorrelation

**Kreuzkorrelation**

Modulationsgrad

Scheitelfaktor

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt$$

- Beschreibung gegenseitiger Abhängigkeit von zwei Signalen
- Maximum wenn beide Signale einander ähnlich sind
- Fourier-Transformation der Kreuzkorrelation ergibt die spektrale Kreuzleistungsdichte
- Grundlage der Kohärenz





# Modulationsgrad

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

**Modulationsgrad**

Scheitelfaktor

$$m = \frac{\hat{x} - \bar{x}}{\bar{x}} 100\%$$

- Verhältnis der Modulationsamplitude zur Trägeramplitude
- Trägeramplitude kann meistens nicht korrekt bestimmt werden
- Ersatzweise arithmetischer Mittelwert der Umhüllenden
- Modulationsamplitude jener Scheitelwert, um welcher das arithmetische Mittel der Umhüllende schwankt
- Alternative Bezeichnung: Schwankungsstärke, Schwankungsgrad - allerdings Verwechslung mit der psychoakustischen Größe Schwankungsstärke



# Modulationsgrad

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

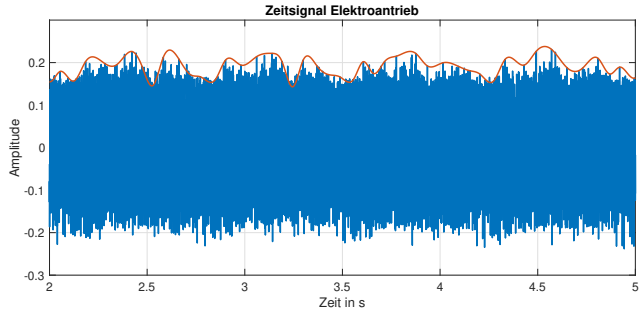
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

**Modulationsgrad**

Scheitelfaktor





# Modulationsgrad

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

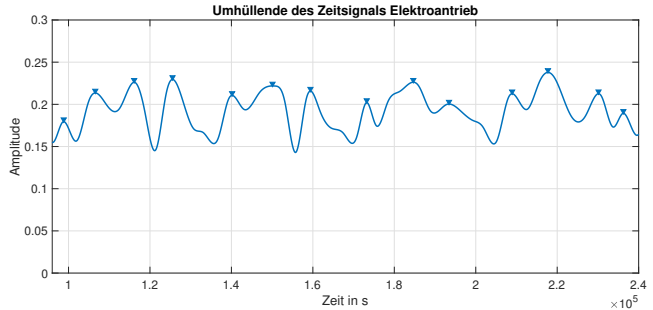
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

**Modulationsgrad**

Scheitelfaktor





# Scheitelfaktor - Crest-Faktor

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor

- $C_F = \frac{|x_{max}|}{\tilde{x}}$
- mit  $\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$
- Charakterisierung regelloser Schwingungen mit vereinzelt Maximalwerten
- Beschreibt die Impulshaltigkeit eines Signals
- Merkmal für das Aufkommen von Stößen im Signal
- Wenn Impulse / Stöße das Signal prägen, ist eine Aussage nicht möglich
- MATLAB®: `CF = peak2rms(signal);`



# Scheitelfaktor - Crest-Faktor

Signalanalyse  
im Zeitbereich

Armin Rohnen

Spitzenwert

Mittelwert

Effektivwert

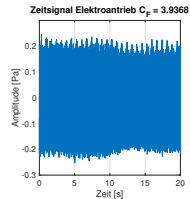
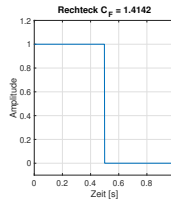
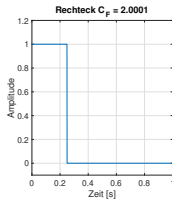
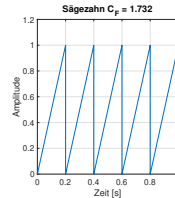
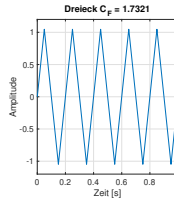
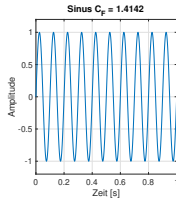
Pegelmessgerät

Autokorrelation

Kreuzkorrelation

Modulationsgrad

Scheitelfaktor





# Filter

## Filter

Armin Rohnen

## Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperfilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung

- Veränderung des (Zeit)Signals
- Unterdrückung unerwünschter Frequenzanteile
- Eckfrequenz  $f_E$  - Angabe bei  $-3 \text{ dB}$  Dämpfung
- immer (!) vor A/D-Wandler (Antialiasing)
- Veränderung der Amplitude im Übergangsbereich
- Filtertyp beeinflusst das Übertragungsverhalten
- Phasenverschiebung im Übergangsbereich, je nach Filtertyp
- Gruppenlaufzeit - Laufzeitverschiebung zwischen gefiltertem und ungefiltertem Signal
- Einschwingzeit: Faustformel  $3 \cdot \frac{1}{f_E}$



# Filtercharakteristik

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

Tiefpassfilter

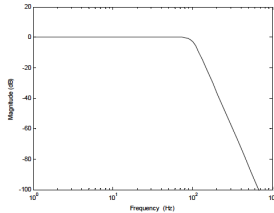
Bandpassfilter

Bandsperrfilter

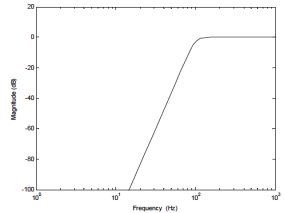
1/n-Oktav-

Bandpassfilterung

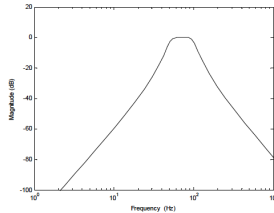
### Tiefpass



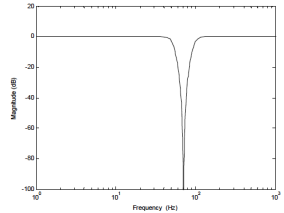
### Hochpass



### Bandpass



### Bandsperr





# Filterordnung

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

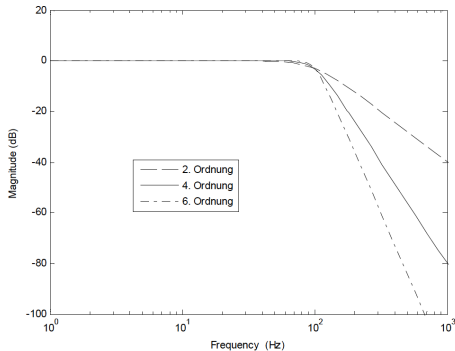
Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung



- Bezugsgröße für die Dämpfung und Flankensteilheit
- $n \cdot 20 \text{ dB je Dekade}$
- $n \cdot 6 \text{ dB je Oktave}$





# Filtertyp

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

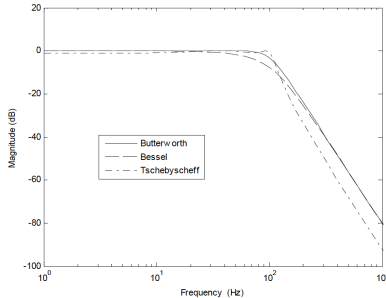
Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung



- Butterworth-Filter: Möglichst langer horizontaler Verlauf im Durchlassbereich bis  $f_E$
- Bessel-Filter: Glatter Frequenzverlauf im Durchlassbereich mit flacherem Verlauf um  $f_E$
- Tschebyscheff-Filter: Welligkeit im Durchlassbereich, scharfes Abknicken und Überschwingen bei  $f_E$



- FIR
  - Filter mit endlicher Impulsantwort - finite response filter
  - Resonanzfreies Filterdesign, immer stabil
  - keine Rückkopplungen, Scheifen, etc.
- IIR
  - Filter mit endlicher Impulsantwort - finite response filter
  - Filterdesign mit Rückkopplungen
  - digitale Version des analogen Filters



## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperfilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung

- `filt_data = lowpass(data, 10000, fs, ...  
ImpulseResponse = 'iir', Steepness = 0.85, ...  
StopbandAttenuation = 60);`
- `filt_data = highpass(data, ...`
- `filt_data = bandpass(data, ...`
- `filt_data = bandstop(data, ...`
- `lpFilt = designfilt('lowpassiir', 'FilterOrder', 8, ...  
'PassbandFrequency', 35e3, 'PassbandRipple', 0.2, ...  
'SampleRate', 200e3);  
filt_data = filter(lpFilt, data);`



# Hochpassfilter

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

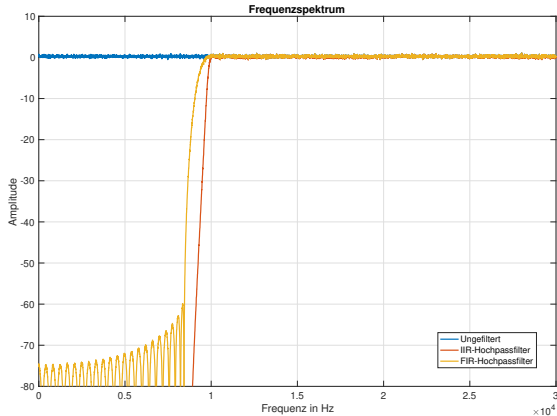
Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung





# Tiefpassfilter

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

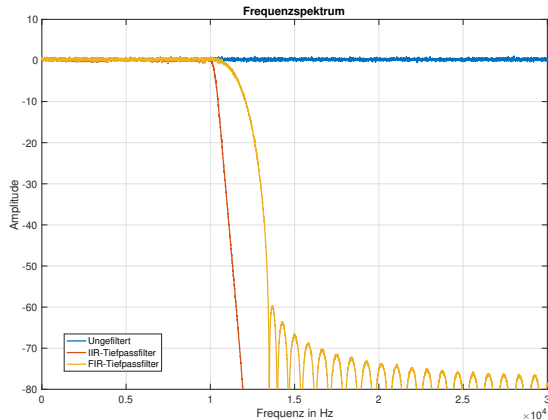
**Tiefpassfilter**

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung





# Bandpassfilter

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

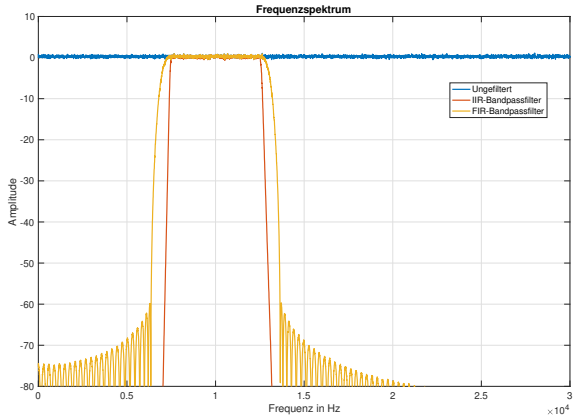
Tiefpassfilter

**Bandpassfilter**

Bandsperrefilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung





# Bandsperrfilter

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

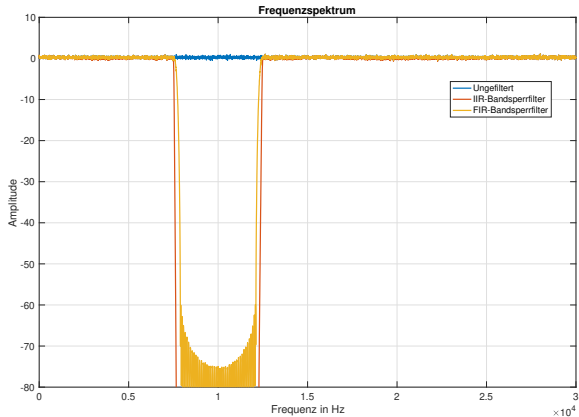
Tiefpassfilter

Bandpassfilter

**Bandsperrfilter**

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung





# 1/n-Oktav-Bandpassfilterung

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung

- musikalische Definition

- zwei Töne im Verhältnis 2 : 1
- 8 Zwischentöne

- technische Definition

- parallel angeordnete Bandpassfilter
- nachgeschaltete Signalanalyse i.d.R. Pegelmessgerät
- Grenzfrequenzen Oktav-Bandpassfilter

$$f_u = \frac{f_o}{2}$$

$$f_m = \sqrt{f_u \cdot f_o}$$

- Grenzfrequenzen 1/n-Oktav-Bandpassfilter

$$f_u = \frac{f_o}{\sqrt[n]{2}}$$

$$f_m = \sqrt{f_u \cdot f_o} = f_u \cdot \sqrt[n]{2}$$





# 1/n-Oktav-Bandpassfilterung

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

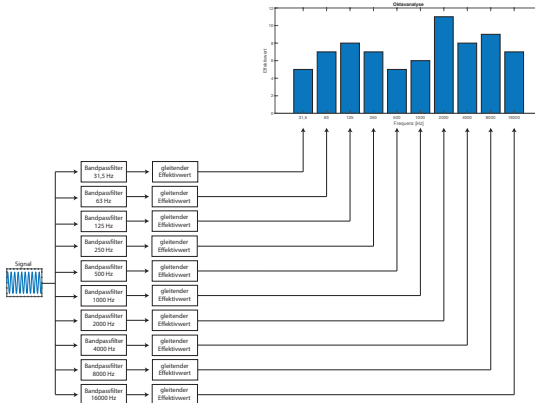
Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-  
Bandpassfilterung



Schematische Darstellung eines Oktav-Analysators



# 1/n-Oktav-Bandpassfilterung

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperfilter

1/n-Oktav-  
Bandpassfilterung

- genormt nach DIN EN 61260
- Grenzfrequenzen  $f_u$ ,  $f_o$ ,  $f_m$
- Bandbreite  $B$
- Filtergüte  $Q$  (Welligkeit)
- Undefinierte Flankensteilheit
- Mittenfrequenz  $f_m$  nach DIN EN ISO 266
  - $f_m = 16 \frac{2}{3} \text{ Hz}$  - bei den Bahnen
  - $f_m = 50 \text{ Hz}$  - im Schiffsbau und Energieversorgung
  - $f_m = 60 \text{ Hz}$  - im Schiffsbau und Energieversorgung
  - $f_m = 1000 \text{ Hz}$  - in der Akustik



# 1/n-Oktav-Bandpassfilterung

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

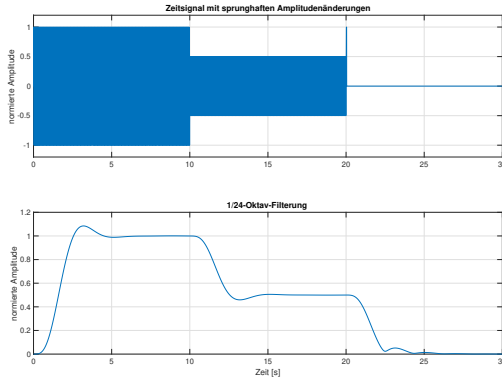
Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-  
Bandpassfilterung



Zeitsignal mit  $f = 20,2 \text{ Hz}$  und sprunghaft ändernden Amplituden (oben) sowie Signalverlauf des ersten Oktavfilters einer  $1/24$ -Oktavfilterung (unten)



# 1/n-Oktav-Bandpassfilterung

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

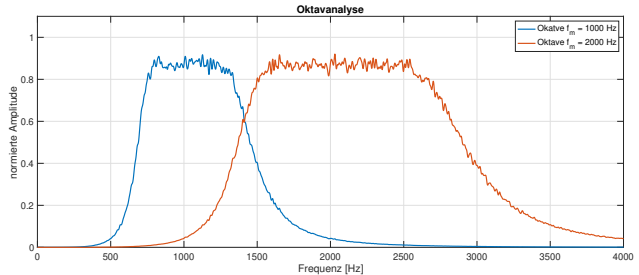
Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-  
Bandpassfilterung



Betragsspektren für die Signalanteile mit  $f_m = 1000$  Hz und  $f_m = 2000$  Hz eines oktavgefilterten Rauschsignals.

Analyselücke ist abhängig von der Flankensteilheit.



# 1/n-Oktav-Bandpassfilterung

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

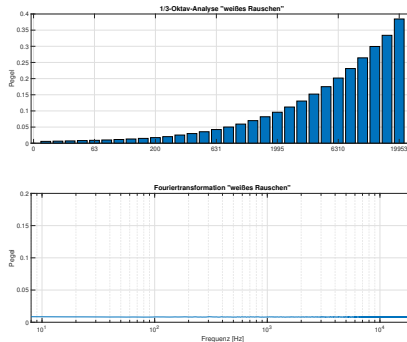
Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-  
Bandpassfilterung



Analyse des Signals "weißes Rauschen"

Obere Abbildung: 1/3-Oktav-Analyse

Untere Abbildung: Fouriertransformation



# 1/n-Oktav-Bandpassfilterung in MATLAB®

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung

- Filterung  

```
bandbreite = ' 1/12 octave';  
octFilterBank = octaveFilterBank(bandbreite, fs, FrequencyRange = [2020000]);  
centerFrequencies = getCenterFrequencies(octFilterBank);  
filtData = octFilterBank(data);
```
- Nachbearbeitung und Datenreduktion  

```
tau = 0.125;  
wl = ceil(fs * tau);  
schritte = 100;  
step = ceil(fs/schritte);  
for xi = 1 : length(centerFrequencies)  
    [linie, ~] = envelope(filtData(:, xi), wl, 'rms');  
    pos = 0;  
    for steps = ceil(step/2) : step : length(time) - ceil(step/2)  
        pos = pos + 1;  
        nOctLinien(pos, xi) = 20 * log10(mean(...  
            linie(steps - ceil(step/2) + 1 : steps + ceil(step/2)))/20e - 6);  
        timeOctLinien(pos, 1) = time(steps, 1);  
    end  
end
```



# 1/n-Oktav-Bandpassfilterung in MATLAB®

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

Hochpassfilter

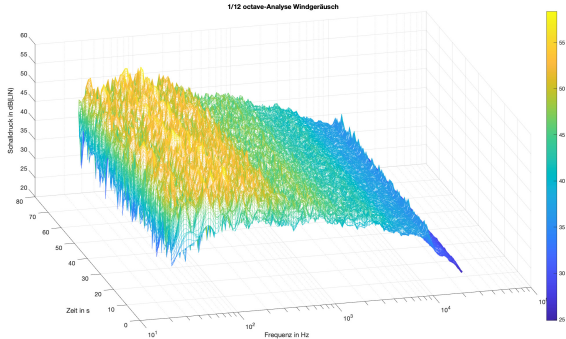
Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-

Bandpassfilterung



● 3D-Darstellung  
`mesh(centerFrequencies, timeOctLinien, nOctLinien)`  
`set(gca, 'xscale', 'log')`  
`view(-15, 40)`  
`colorbar`



# 1/n-Oktav-Bandpassfilterung in MATLAB®

## Filter

Armin Rohnen

Filter

Filtercharakteristik

Filterordnung

Filtertyp

Digitalfilter

MATLAB®

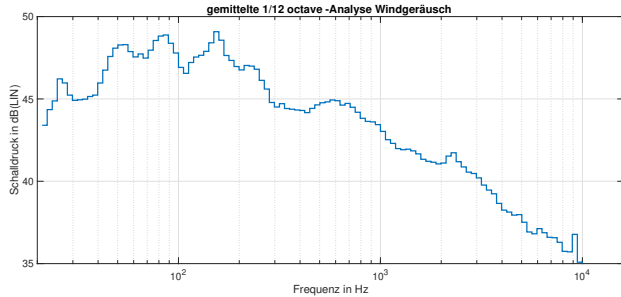
Hochpassfilter

Tiefpassfilter

Bandpassfilter

Bandsperrfilter

1/n-Oktav-  
Bandpassfilterung



- 2D-Darstellung  
`stairs(centerFrequencies, mean(nOctLinien, 1), 'LineWidth', 2)`  
`set(gca, 'xscale', 'log')`  
`axis([20 16000 35 50])`





# Amplitudendichte $p(x)$

Zählverfahren  
und Statistik

Armin Rohnen

Amplitudendichte

Rainflow

- Wahrscheinlichkeit mit der ein Wert auftritt
- Annahme der Normalverteilung
- Amplitudendichte  $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
- Mittelwert  $\mu$ , Standardabweichung  $\sigma$
- Nachmessung der Steuerspannung und Anzeige des Messwerts auf einem Display
- Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(x) = \int p(x) dx$ , im Intervall der Betrachtung
- für das Intervall  $-\infty$  bis  $+\infty$  wird  $P(x) = 1$
- Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 dt}$
- bei  $\bar{x} = 0$  wird  $\sigma = \tilde{x}$



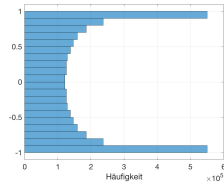
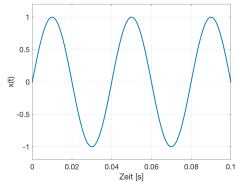
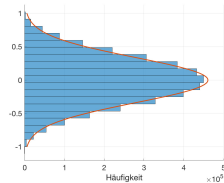
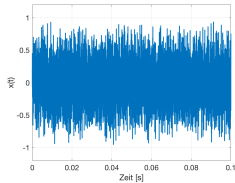
# Amplitudendichte $p(x)$

Zählverfahren  
und Statistik

Armin Rohnen

Amplitudendichte

Rainflow



Zeitverlauf und Amplitudendichte zweier Signale, oben: Rauschsignal - unten: Sinussignal



# Amplitudendichte $p(x)$

Zählverfahren  
und Statistik

Armin Rohnen

Amplitudendichte

Rainflow

- MATLAB®-Anweisung  
`h = histogram(schlechtwegDaten, edges, ...  
'Orientation', 'vertical', ...  
'Normalization', 'probability');`
- `edges` Definition der Klassen(breiten)
- `edges = [-200 : 10 : 200];`  
40 Klassen mit der Breite 10  
Verteilt von -200 bis 200
- `edges = [-200 -50:5:50 200];`  
eine Klasse von -200 bis -50  
21 Klassen von -50 bis 50 mit der Klassenbreite 5  
eine Klasse von 50 bis 200
- Werte  
`haeufigkeit = h.Values;`  
`klassengrenzen = h.BinEdges;`  
`anz_klassen = h.NumBins;`



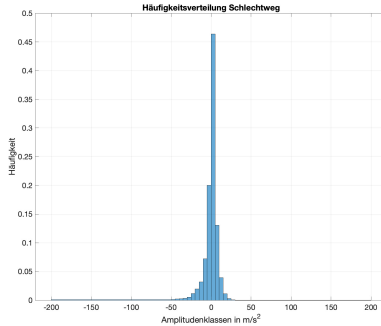
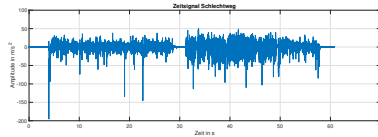
# Amplitudendichte $p(x)$

Zählverfahren  
und Statistik

Armin Rohnen

Amplitudendichte

Rainflow



Zeitverlauf (oben) und Häufigkeitsverteilung (unten)





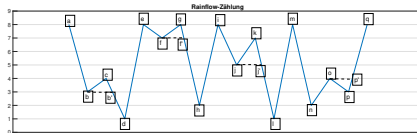
# Rainflow-Zählung

Zählverfahren  
und Statistik

Armin Rohnen

Amplitudendichte

Rainflow



- Rainflow-Zählung - über die Flanken fließt Regen der von einem Dach zum nächsten Tropft
- Bei Umkehrpunkten (links und rechts der horizontalen Zeitachse) fällt der Tropfen nach unten  
z. B. von b auf die Flanke c-d oder von f auf die Flanke g-h.
- Halbzyklen ergeben sich, wenn der Tropfen fließt und einen Umkehrpunkt erreicht  
z. B. a-b, b-c und f-g
- Halbzyklen ergeben sich ebenso wenn der Tropfen "Sammelpunkte" der Tropfen erreicht, das von einem darüber liegenden Umkehrpunkt fällt  
z. B. c-b', g-f' und j-j'
- Vollzyklen werden aus zwei Halbzyklen gleicher Schwingbreite und gleicher Lage (Maximum, Minimum) gebildet  
z. B. die Flächen a-d-e, b-c-b', f-g-f', e-h-i



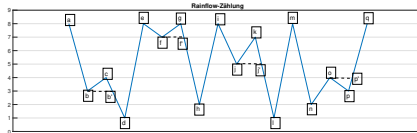
# Rainflow-Zählung

Zählverfahren  
und Statistik

Armin Rohnen

Amplitudendichte

Rainflow



Rainflow-Zählung aus der Abbildung

Vollzyklus	Von	Nach	Mittelwert	Schwingbreite
a-d-e	8	1	5	7
b-c-b'	3	4	4	1
e-h-i	8	2	5	6
f-g-f'	7	8	7	1
i-l-m	8	1	5	7
j-k-j'	5	7	6	2
m-n-q	8	2	5	6
o-p-p'	4	3	4	1



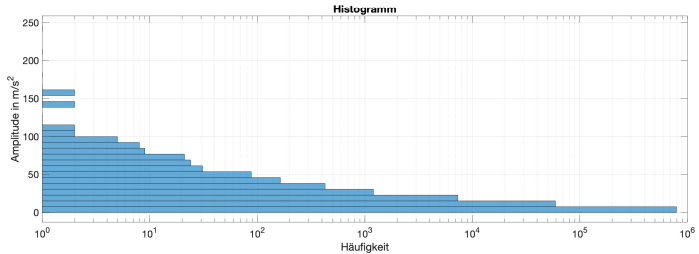
## Summenhäufigkeit

Das Beispiel enthält 3 mal die Schwingbreite 1, 1 mal die Schwingbreite 2, 2 mal die Schwingbreite 6 und 2 mal die Schwingbreite 7.

Schwingbreite	Anzahl
7	2
6	4
5	4
4	4
3	4
2	5
1	8

# Rainflow-Zählung MATLAB®

```
c = rainflow(schlechtwegDaten);
klassen = 32;
h = histogram(c(:, 2), klassen, 'Orientation', 'horizontal');
haeufigkeit = h.Values;
klassengrenzen = h.BinEdges;
anz_klassen = h.NumBins;
```







# Rainflow-Zählung MATLAB®

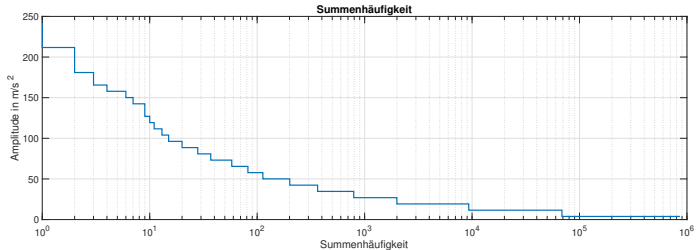
Zählverfahren  
und Statistik

Armin Rohnen

Amplitudendichte

Rainflow

```
for xi = 1 : anz_klassen  
    klasse(xi) = (klassengrenzen(xi) + klassengrenzen(xi + 1))/2;  
    summenhaeufigkeit(xi) = sum(haeufigkeit(1, xi : end));  
end  
stairs(summenhaeufigkeit, klasse, 'LineWidth', 2)
```





# Fouriertransformation DFT / FFT

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

### DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

- als diskrete Fouriertransformation (DFT)
- Ableitung als schnelle Fouriertransformation (FFT), dann  $N = 2^n$
- Bandbegrenzt und Auflösungsbegrenzt
- N diskrete Messwerte ergeben N diskrete Ergebnisse (Linien) plus Gleichanteil
- Gleichzusetzen mit einem Mittelwert
- Gedankenmodell: Approximation von Sinusfunktionen
- nie falsch
  - Daten (signal)
  - Parametrierung



# Fouriertransformation DFT / FFT

## Grundlagen der Fouriertransfor- mation

Armin Rohnen

## DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

- Je mehr Messwerte je Periodendauer, desto stabiler die Fouriertransformation
- Signal durch analoges Tiefpassfilter auf den Frequenzbereich  $f_s/2$  begrenzen
- Abtastrate zweckmäßig wählen
- Hohe Abtastrate ist vorteilhaft, erzeugt aber hohe Datenmengen
- Vorgehen:
  - Orientierungsmessung mit hoher (höchster) Abtastrate
  - Zeitsignal betrachten (Übersteuerung, Impulse, Schläge, sprunghafte Änderungen)
  - Signalanalyse durchführen
  - Abtastrate an den Bedarf anpassen
  - Höhere Abtastraten bei impulsbehafteten Signalen



# Fouriertransformation DFT / FFT

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

## DFT / FFT

## Fensterung

## Eigenschaften

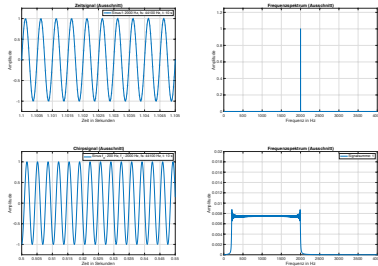
## Überlappung

## Mittelung

## Genauigkeit

## Parametrierung

## MATLAB®



- Heisenbergsche Unschärferelation  
komplementäre Eigenschaften sind gleichzeitig nicht beliebig genau bestimmbar
- Signalanalyse ist zu einem Zeitpunkt nicht möglich (Grundgesetz der Nachrichtentechnik [6])
- Lösungen:
  - Signaländerung verringern
  - Parametrierung an Signal anpassen
  - andere Methodik wählen



# Leakage

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

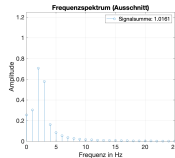
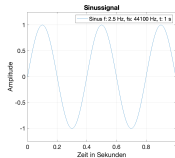
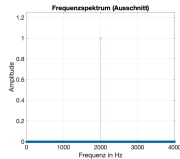
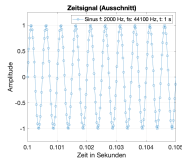
Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®



- Sprünge an den (Daten)Fenstergrenzen führen zu Leakage (engl. Leakage) in der Fouriertransformation
- Bedingung:  
Signal muss über die Fenstergrenzen hinweg einen kontinuierlichen Verlauf aufweisen



# Fensterung

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

## Fensterung

Eigenschaften

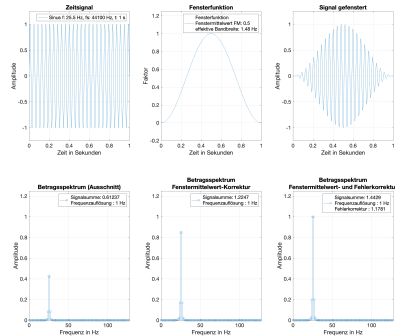
Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®



- Das Signal wird durch Fensterung in den kontinuierlichen Verlauf gezwungen
- Fensterung hat Einfluss auf das Amplitudenergebnis der FT
- Vergleichbarkeit von Ergebnissen nur mit gleicher Fensterung möglich
- Nur Rechteck (kein), Hanning und Flattop eindeutige Fensterfunktionen, weil lediglich die Blocklänge als Parameter



# Eigenschaften der Fensterung: Fenstermittelwert, Leistungsmittelwert, Bandbreite

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

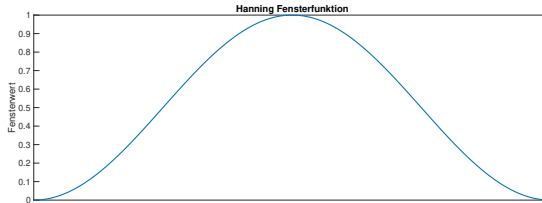
Überlappung

Mittlung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®



- Fenstermittelwert kompensiert den Amplitudenfehler der Fensterfunktion

$$FM = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w(k)$$

- Fensterung im Zeitbereich kürzt die effektive Fensterdauer und führt im Frequenzbereich zur Erhöhung der effektiven Bandbreite

$$B_{eff} = \frac{PM}{T \cdot FM^2}$$

- mit  $PM$  dem Leistungsmittelwert der Fensterfunktion

$$PM = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^2(k)$$

- Rechteckfenster  $FM = 1$ ,  $PM = 1$  und  $B_{eff} = \frac{1}{T} = \Delta f$



# Überlappung - Overlap

Grundlagen der  
Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

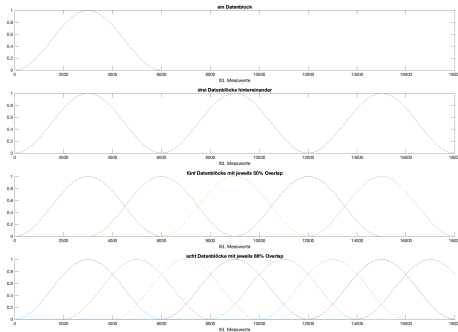
Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®



- Durch die Fensterung entstehen in Datenströmen „Analyselücken“
- Übliche Fensterung mit Hanning-Fensterfunktion, 66 2/3 % Überlappung und Mittelung von 3, 5, ... Spektren





# Mittlung

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

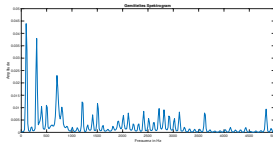
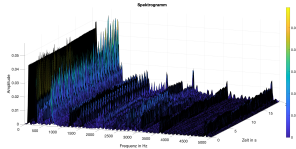
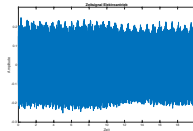
Überlappung

Mittlung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®





# Mittlung bei Signaländerung

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

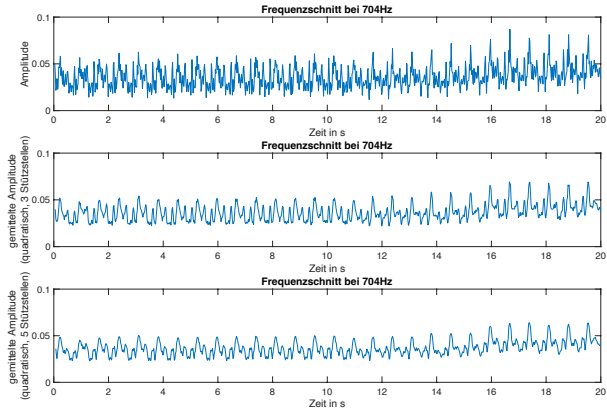
Überlappung

Mittlung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®





# Mittlung

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

Überlappung

Mittlung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®

- Linearer Mittelwert

$$\bar{S}_x = \frac{\sum_{\xi=1}^{\xi=n} S_x(\xi)}{n}$$

*mean(Sx, 2)*, 2 gibt die Richtung der Mittlung an (hier Zeilenweise)

- Quadratischer Mittelwert

$$\tilde{S}_x = \sqrt{\frac{\sum_{\xi=1}^{\xi=n} S_x(\xi)^2}{n}}$$

*rms(Sx, 2)*, 2 gibt die Richtung der Mittlung an (hier Zeilenweise)

- Summierung(Mittlung) von Spektrallinien (Frequenzen) zur Pegelbestimmung, Summenbestimmung, Frequenzschnitt, etc.

$$L(f) = \sqrt{\sum_{\xi=f-n \cdot \Delta f}^{\xi=f+n \cdot \Delta f} X(\xi)^2}$$

*Amplituden = sqrt(sum(Sx(linie - 1 : linie + 2, :) . ^ 2));*



# Mittelung

Grundlagen der  
Fouriertransfor-  
mation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®

- Mittelungen von Betragsspektren ( $|\underline{S}_x|$ ), Autopowerspektrum ( $S_{xx}$ ) und PSD ( $G_{xx}$ ) sind ohne Einschränkungen möglich

$$\overline{X}(f) = \frac{\sum_{\xi=1}^{\xi=n} |\underline{X}(f, \xi)|}{n}$$

- Mittelungen komplexer Spektren eher nicht möglich

$$\underline{\overline{X}}(f) = \frac{\sum_{\xi=1}^{\xi=n} \underline{X}(f, \xi)}{n}$$

Nur dann sinnvolles Ergebnis, wenn Triggerbedingungen für das Zeitsignal vorlagen z. B. Impulshammerschläge, Messungen mit Bezugsmarke



# Amplitudengenauigkeit

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®

- Lediglich das Rechteckfenster weist keinen Amplitudenfehler auf
- Jede andere Fensterfunktion führt zu einer systematischen Verringerung der Amplitude - dies wird durch die Division mit dem Fenstermittelwert ausgeglichen
- Jede andere Fensterfunktion weist zusätzlich einen (in der Praxis) unsystematischen Fehler auf. Dieser wird üblich nicht ausgeglichen.
- Jede Amplitudenkorrektur führt zur Verfälschung der Signalenergie
- Hanning-Fensterfunktion weist bis 1,424 dB bzw. 17,8 % Amplitudenfehler auf
- Flatop-Fensterfunktion weist bis zu 0,19 dB bzw. 2,2 % Amplitudenfehler auf
- Der Amplitudenfehler ist Abhängig vom Verhältnis der Linienzahl ( $N$ ), zur Blocklänge ( $T$ ) und der Phasenlage des zu analysierenden Signals
- In der Praxis ist mit bis zu 2,8 dB bzw. 28 % Amplitudenunterschied zu rechnen
- Gleiche Parametrierung führt zu gleichem Fehler

Wenn alle den gleichen Fehler machen fällt er nicht auf



# Parametrierung der Fouriertransformation

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

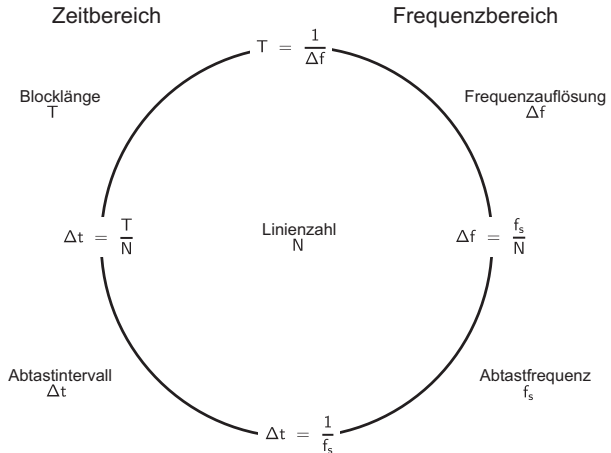
Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®



und die Fensterfunktion



# Praktische Umsetzung in MATLAB®

Grundlagen der  
Fouriertransfor-  
mation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®

- ➊ Messung mit festgelegter Abtastfrequenz (Abtastrate)  $f_s$
- ➋ Festlegung einer sinnvollen Frequenzauflösung (Linienabstand)  $\Delta f$
- ➌ Berechnung der Linienzahl  $N = \frac{f_s}{\Delta f}$
- ➍ Festlegung der Fensterfunktion i.d.R. Hanning
- ➎ Festlegung der Überlappung i.d.R. 2/3
- ➏ Berechnung des Fenstermittelwertes
- ➐ Berechnung des Leistungsmittelwertes
- ➑ Berechnung der Blocklänge  $T = \frac{1}{\Delta f}$
- ➒ Bestimmung von  $B_{eff}$
- ➓ Durchführung der Fouriertransformation (Kanalweise!)
- ➑ Berechnung des Spektrums
- ➒ Darstellung



# Praktische Umsetzung in MATLAB®

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®

```
❶ fs = 48000;
❷ df = 4;
❸ N = ceil(fs/df);
❹ w = hann(N);
❺ O = ceil(2/3 * N);
❻ FM = sum(w)/N;
❼ PM = sum(w.^2)/N;
❽ T = 1/df;
❾ Beff = PM/(T * FM^2);
❿ [s,f,t] = spectrogram(data, w, O, N, fs);
⓫ Sx = 2 * abs(s/N)/FM;
⓬ mesh(f,t,Sx')
   colorbar
   title('Betrags — Spektrogramm')
   xlabel('Frequenz in Hz')
   ylabel('Zeit in s')
   zlabel('Amplitude')
   view(15,30)
   set(gca, 'FontSize', 16) axis([0 5000 0 20 0 0.06])
⓭ plot(f, mean(Sx, 2)); alternativ rms(Sx, 2), je nach Vereinbarung
   title('gemitteltes Betrags — Spektrum')
   xlabel('Frequenz in Hz')
   ylabel('Amplitude')
   set(gca, 'FontSize', 16)
   axis([0 5000 0 0.05])
```





# Praktische Umsetzung in MATLAB®

Grundlagen der  
Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

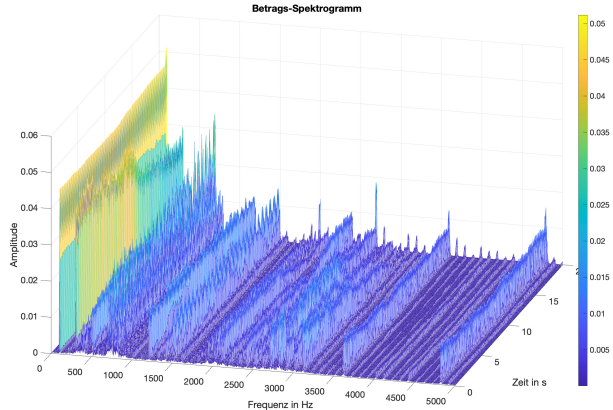
Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®





# Praktische Umsetzung in MATLAB®

## Grundlagen der Fouriertransformation

Armin Rohnen

DFT / FFT

Fensterung

Eigenschaften

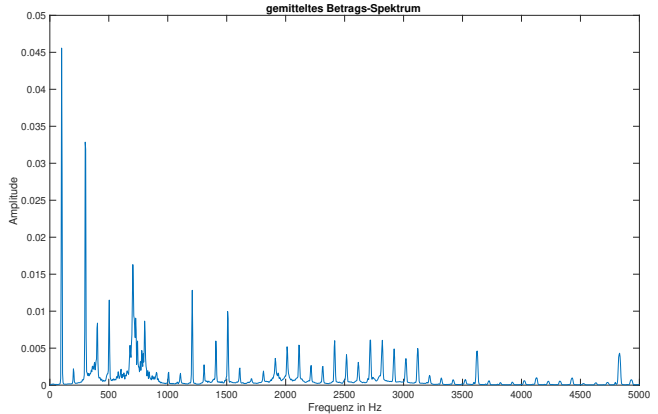
Überlappung

Mittelung

Genauigkeit

Parametrierung

MATLAB®





# Betragsspektrum $S_x$

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

$S_x$

$S_{xx}$

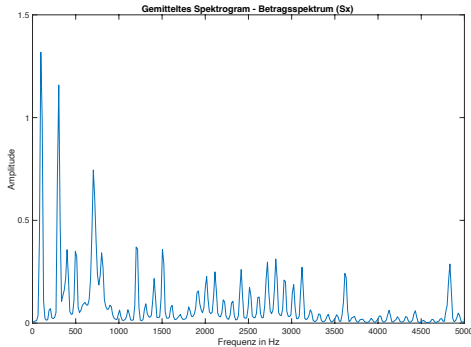
$S_{xy}$

$G_{xx}$

$H(f)$

$\gamma^2$

$M_x$



- Amplitudenwerte in Abhängigkeit der FT-Parametrierung
- $S_x(f) = 2 \cdot \frac{|S(f)|}{N \cdot FM}$
- üblich keine Normierung (Mittelung  $\frac{1}{N}$ ) der Fourierkoeffizienten, keine Korrektur mit Fenstermittelwert und keine Anpassung an das eigentlich zweiseitige Spektrum
- MATLAB®:  $S_x = rms(2 * abs(s/N) / FM, 2);$
- Vergleiche mit unterschiedlichen FT-Einstellungen nicht möglich



# Autopowerspektrum Sxx

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

Sx

Sxx

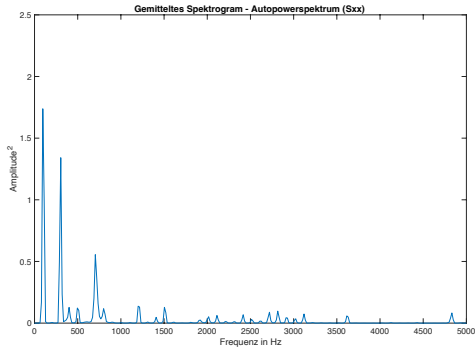
Sxy

Gxx

H(f)

$\gamma^2$

Mx



- Ebenfalls große Amplitudenabhängigkeit von den FT-Parametern
- $S_{xx}(f) = \underline{S}_x(f) \cdot \underline{S}_x(f)^* = \left(2 \cdot \frac{S(f)}{N \cdot FM}\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{S(f)}{N \cdot FM}\right)^* = S_x(f)^2$
- MATLAB®:  $S_{xx} = S_x \wedge 2$ ;
- Ergebniswerte sind quadriert
- Bewirkt die Konzentration auf Frequenzbereiche mit höherem Energieinhalt
- Vergleiche mit unterschiedlichen FT-Einstellungen nicht möglich



# Kreuzleistungsspektrum $S_{xy}$

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

$S_x$

$S_{xx}$

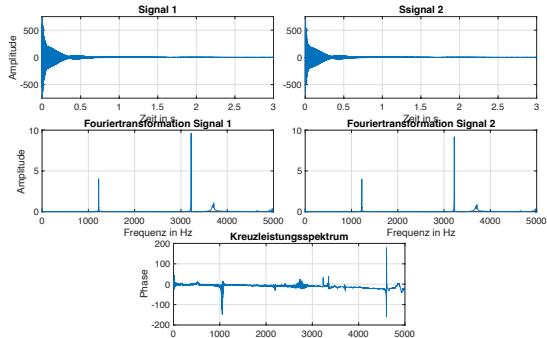
$S_{xy}$

$G_{xx}$

$H(f)$

$\gamma^2$

$M_x$



- Grundlage der Kohärenzfunktion
- Kreuzleistungsspektrum stellt das „Gleichheitsspektrum“ zweier Signale dar
- ergibt u.a. den Phasenversatz von Signalen
- $S_{XY}(f) = \underline{X}(f) \cdot \underline{Y}(f)^*$
- MATLAB®:  $S_{xy} = s1/N. * conj(s2/N);$



# Spektrale Leistungsdichte (PSD) $G_{xx}$

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

$S_x$

$S_{xx}$

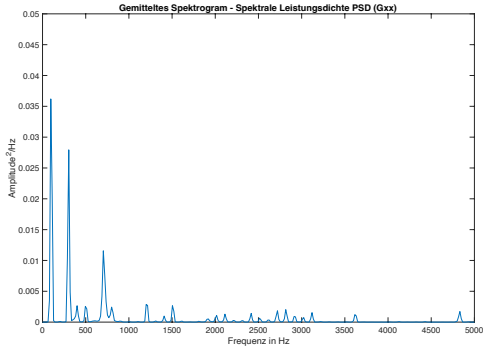
$S_{xy}$

$G_{xx}$

$H(f)$

$\gamma^2$

$M_x$



- Anzeigeform der Hardwareanalysatoren
- Amplitudenwerte mit geringem Einfluss durch FT-Parametrierung
- $$G_{xx}(f) = \frac{P(f)}{B_{eff}} = \frac{\left(\frac{S_x(f)}{\sqrt{2}}\right)^2}{B_{eff}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{xx}(f)}{B_{eff}}$$
- MATLAB®: `[s, f, ~, Gxx] = spectrogram(...);`
- Vergleiche mit unterschiedlichen FT-Einstellungen möglich



# Übertragungsfunktion $H(f)$

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

$S_x$

$S_{xx}$

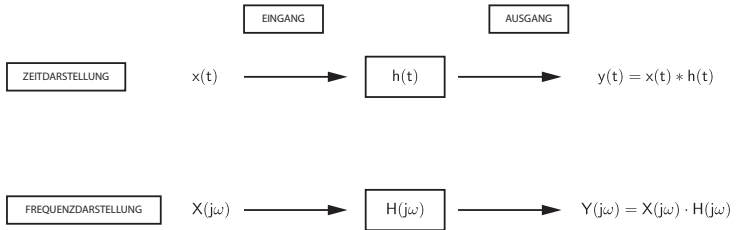
$S_{xy}$

$G_{xx}$

$H(f)$

$\gamma^2$

$M_x$



- Lineares zeitunabhängiges System (LTI - linear time invariant)
- Beschreibung im Zeitbereich durch Faltung
- Beschreibung im Frequenzbereich durch Übertragungsfunktion

MATLAB®

```
[E, f] = spectrogram(anregung, anrWindow, o, N, fs);
```

```
[A, f] = spectrogram(antwort, antWindow, o, N, fs);
```

```
H = A ./ E;
```



# Übertragungsfunktion $H(f)$

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

$S_x$

$S_{xx}$

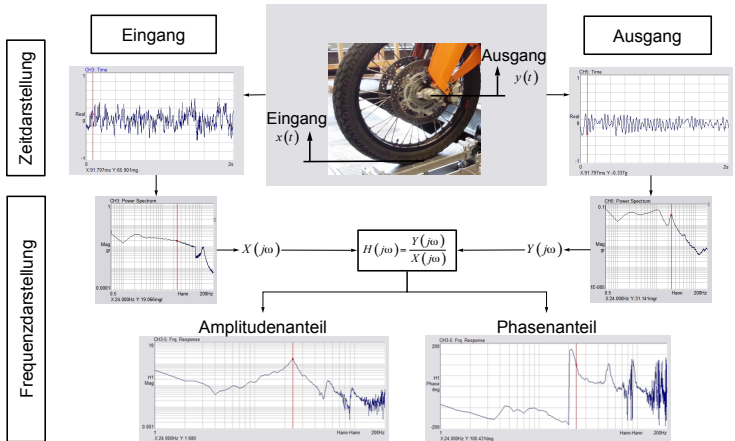
$S_{xy}$

$G_{xx}$

$H(f)$

$\gamma^2$

$M_x$







# Kohärenzfunktion / Kohärenzspektrum $\gamma^2$

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

Sx

Sxx

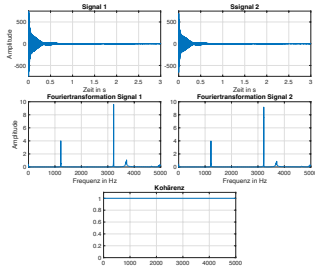
Sxy

Gxx

H(f)

$\gamma^2$

Mx



- Kohärenzfunktion stellt qualitativ die Ähnlichkeit von Signalen dar
- Normierung des Kreuzleistungsspektrums
- $$\gamma^2(f) = \frac{|S_{XY}(f)|^2}{S_{XX}(f) \cdot S_{YY}(f)} = \frac{|\underline{X}(f) \cdot \underline{Y}(f)^*|^2}{\underline{X}(f) \cdot \underline{X}(f)^* \cdot \underline{Y}(f) \cdot \underline{Y}(f)^*}$$
- MATLAB®: `coh = Sxy.^2 ./ (abs(s1/N) * conj(s1/N)) .* abs(s2/N) * conj(s2/N));`
- Wertebereich 0 bis 1 bzw. 0 bis 100 %
- 0 keine Ähnlichkeit ... 1 volle Ähnlichkeit
- Werte ab 0.75 weisen auf sehr gute Ähnlichkeiten hin



# Modulationsanalyse Mx

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

Sx

Sxx

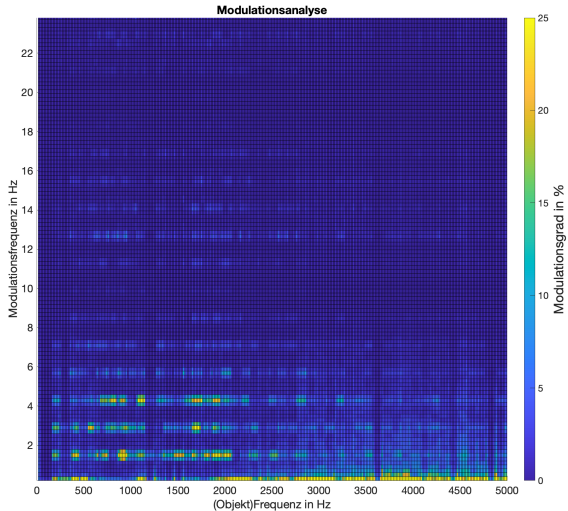
Sxy

Gxx

H(f)

$\gamma^2$

Mx



Armin Rohnen

Signalanalyse mit MATLAB®

Das Spektrum an Spektren



# Modulationsanalyse Modulationsfrequenz über Trägerfrequenz

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

Sx

Sxx

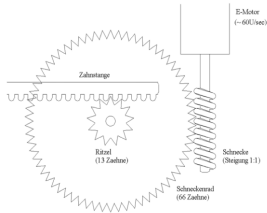
Sxy

Gxx

H(f)

$\gamma^2$

Mx



- Motor Nennwert  $5400 \text{ min}^{-1}$ , Drehfrequenz 90 Hz (unter Last geringer), Anker, Kommutierung (Stromwendung)
- Wellendrehfrequenz 90 Hz
- Schneckenrad 60 Zähne, Drehfrequenz 1, 5 Hz
- Ritzel 13 Zähne, Drehfrequenz 1, 5 Hz, Zahneingriffsfrequenz 19, 5 Hz
- Auffälligkeiten im Modulationsspektrum  
1, 4 Hz; 2, 8 Hz; und 4, 2 Hz als Modulationsfrequenz  
912 Hz, Trägerfrequenz (Objektfrequenz), Faktor 10 zur Motornennfrequenz
- Moduliert wird eine das Motorgeräusch bestimmende Frequenz mit  $f \approx 1, 5 \text{ Hz}$  und deren Vielfache
- Problem bei Schneckenrad oder Ritzel



# Modulationsanalyse Modulationsfrequenz über Trägerfrequenz

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

Sx

Sxx

Sxy

Gxx

H(f)

$\gamma^2$

Mx

## MATLAB®

- Betrags-Spektrogramm erstellen mit nicht zu kleinem  $\Delta f$   

```
df = 16;  
N = ceil(fs/df);  
w = hann(N);  
FM = sum(w)/N;  
O = ceil(2/3 * N);  
[s, f, t] = spectrogram(data, w, O, N, fs);  
Sx = 2 * abs(s/N)/FM;
```
- Frequenzbereich begrenzen  

```
fO = 5000;  
XiO = ceil(fO/df) + 1; % Index der oberen Analysefrequenz
```
- Je Frequenzline einen Pegelverlauf über die Zeit bilden - Frequenzschnitt (Beispiel bei  $f = 704$  Hz)  

```
fAnsicht = 704;  
linie = ceil(fAnsicht/df) + 1; % Linien-Index bestimmen  
Amplituden = sqrt(sum(Sx(linie - 1 : linie + 2, :).^2)); % Frequenzschnitt  
forxi = 3 : length(Amplituden) - 2  
    AmpMittel(xi) = rms(Amplituden(1, xi - 2 : xi + 2));  
end  
AmpMittel = AmpMittel(1, 3 : end); % ersten beiden Werte haben den Betrag o  
Gleichanteil = mean(AmpMittel); % Gleichanteil für die Berechnung des Modulationsgrades  
AmpMittel = AmpMittel - Gleichanteil; % Gleichanteil abziehen
```



# Modulationsanalyse Modulationsfrequenz über Trägerfrequenz

Das Spektrum  
an Spektren

Armin Rohnen

Sx

Sxx

Sxy

Gxx

H(f)

$\gamma^2$

Mx

- Gemittelttes Betrags-Spektrum für die Frequenzlinie erstellen  

```
dfMod = 0.2; % Frequenzauflösung der Modulationsanalyse  
fsMod = length(AmpMittel)/(t(1, end - 2) - t(3)); % Abtastrate der Modulationsanalyse  
NMod = ceil(fsMod/dfMod); % Linienanzahl der Modulationsanalyse  
OMod = ceil(2/3 * NMod); % Überlappung  
wMod = hann(NMod); % Fensterfunktion der Modulationsanalyse  
FMMMod = sum(wMod)/NMod; % Fenstermittelwert  
[sMod, fMod] = spectrogram(AmpMittel, wMod, OMod, NMod, fsMod);
```
- Modulationsgrad berechnen und im Modulationspektrogramm ablegen  

```
SxMod = mean(2 * abs(sMod/NMod)/FMMMod, 2);  
ModSpektrum(:, linie) = SxMod/Gleichanteil * 100;
```



# Ordnungsanalyse

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

- Anwendung für Drehfrequenzen und deren Vielfache
- Analyse von Systemen mit rotatorischen Ursprung
- Signalanalyse mit drehwinkeläquidistanten Messwerten
- Mitlauf-Filter, Bandpass-Filter mit veränderlicher Mittenfrequenz  
überalterte Technik, digital wenig Umsetzungen
- Üblich Transformation oder Betrachtung von Frequenzspektren
- Problematisch
  - hohe Frequenzauflösung bei gleichzeitig hoher Teitauflösung nicht möglich
  - Betrachtungsfrequenz abhängig von aktueller Drehfrequenz
  - Drehfrequenzänderung und/oder -schwankung
- Selten umgesetzt Transformation aus der Zeitäquidistanz in die Drehwinkeläquidistanz



# Ordnungsanalyse - was ist Ordnung

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

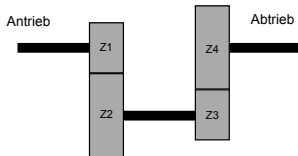
Ordertracking  
OT

## 11,2. Ordnung ?



## Ordnungsliste

Bezogen auf die Antriebsdrehzahl (Beispiel  $1600 \text{ min}^{-1}$ )



Zahnrad	Z1	Z2	Z3	Z4
Nr. Zähne	24	45	21	43

1. Ordnung (Drehfrequenz im Beispiel  $26,67 \text{ Hz}$ )  
-> Unwucht Antriebswelle

24. Ordnung  
(Zähnezahl Antriebsrad, 24fache Drehfrequenz i.B.  $640 \text{ Hz}$ )  
-> Verzahnungsordnung

0,533. Ordnung (Drehfrequenz Zwischenwelle i.B.  $14,2 \text{ Hz}$ )  
-> Unwucht / Exzentrizität der Zwischenwelle

11,2. Ordnung  
(Drehfrequenz Zwischenwelle  $\cdot$  Zähnezahl i.B.  $298,67 \text{ Hz}$ )  
-> Verzahnungsordnung der 2. Getriebestufe

0,26. Ordnung (Drehfrequenz Abtriebswelle i.B.  $6,9 \text{ Hz}$ )  
-> Unwucht / Exzentrizität Abtriebswelle



# Ordnungsanalyse

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

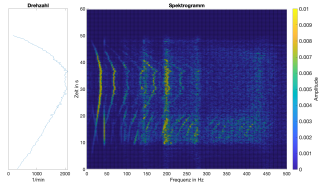
Ordnungsanalyse

Drehzahl

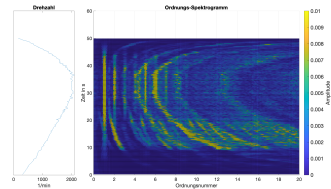
Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

## Frequenzanalyse



$$S_x \cdot \frac{1}{n} = O_x$$



## Ordnungsanalyse





# Drehzahl

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

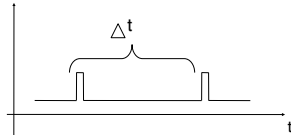
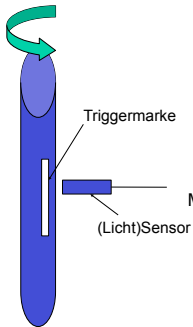
Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT



Messung der Periodenzeit zwischen zwei Impulsen

$$(\text{Drehfrequenz}) f = \text{Impulsanzahl} / \text{Periodenzeit}$$



# Drehzahl

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

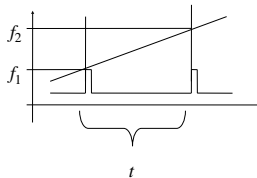
Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

Instationär (mit Drehzahlveränderung)

$$f_2 = f_1 + \frac{df}{dt}$$





# Drehzahl

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

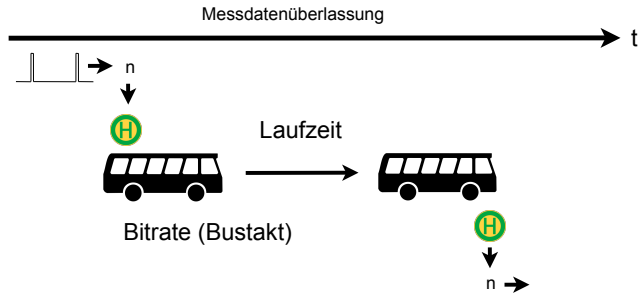
Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

Drehzahlerfassung Bus-Systeme (z. B. CAN-Bus)





# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

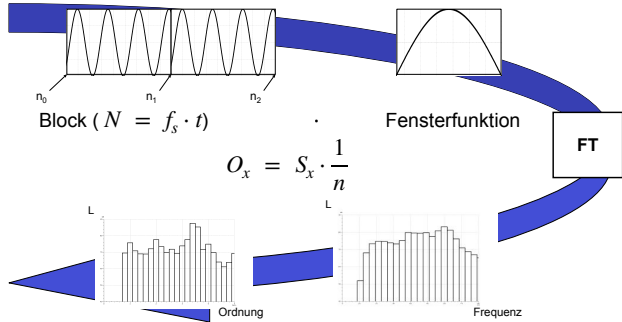
Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT





# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

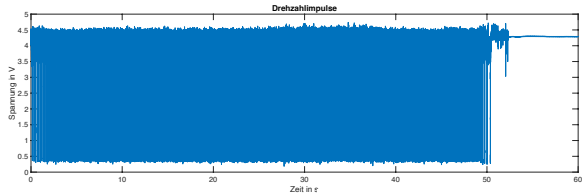
Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

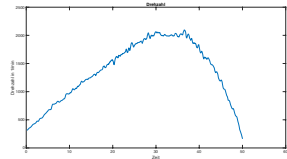
Sx nach Ox

Ordertracking  
OT



Benötigt werden

- Zeitpunkte der Impulse
- Periodendauer von Impuls zu Impuls
- Drehzahlverlauf über die Zeit





# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

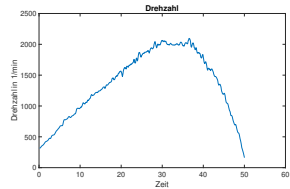
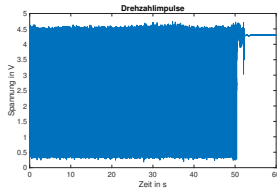
Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT



- Drehzahlberechnung

```
[pulse, nTime] = pulseperiod(Data(:, 2), fs, StateLevels = [2 3]);
for xi = 1 : length(pulse)
    n(xi, 1) = 60/pulse(xi, 1);
end
```
- pulse - Periodendauer zwischen zwei Impulsmarken
- nTime - zugehöriger Zeitstempel (Anfangszeitpunkt)
- n - Drehzahlen



# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

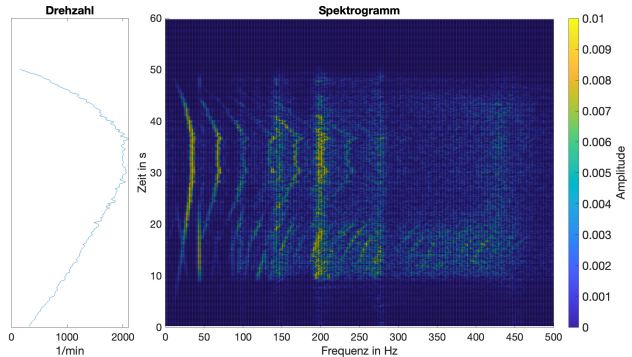
Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT





# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

```
df = 2;  
N = ceil(fs/df);  
O = ceil(2/3 * N);  
w = hann(N);  
FM = sum(w)/N;  
  
subplot(1, 4, [2, 4])  
[s, f, t] = spectrogram(Data(:, 1), w, O, N, fs);  
Sxx = 2 * abs(s/N)/FM;  
surf(f, t, Sxx');  
cb = colorbar;  
caxis([00.01])  
axis([0 500 0 60 00.1])  
view(0, 90)  
title('Spektrogramm')  
xlabel('Frequenz in Hz')  
ylabel('Zeit in s')  
set(gca, 'FontSize', 16);  
cb.Label.String = 'Amplitude';  
cb.FontSize = 18;  
  
subplot(1, 4, 1)  
plot(n, nTime)  
set(gca, 'FontSize', 16)  
set(gca, 'ytick', [])  
title('Drehzahl')  
xlabel('1/min')
```





# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

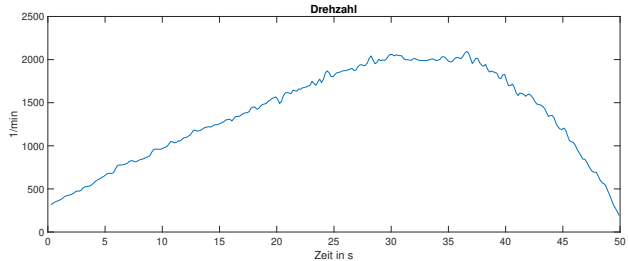
Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT



Für die Berechnung des Ordnungsspektrums aus dem Frequenz-Spektrogramm wird für jedes Spektrum eine gültige Drehzahl benötigt. Dazu wird der Vektor mit den Drehzahlen ( $n$ ) auf die Zeitachse  $t$  uminterpoliert.

$$nSpek = interp1(nTime, n, t);$$



# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

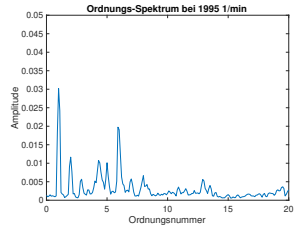
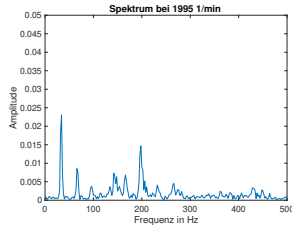
Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT



Jedes einzelne Frequenzspektrum wird in ein Ordnungsspektrum umgerechnet



# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

```
maxOrd = 20; % maximale Ordnungsnummer für die Umrechnung
dOrd = 0.1; % Ordnungsauflösung
Seitenbaender = 1; % Berechnung mit +/- Frequenzlinien

for spekNr = 1 : length(nSpek) - Seitenbaender
    if nSpek(1, spekNr + Seitenbaender) > 0
        oLinie = 0;
        for xi = 0 : dOrd : maxOrd
            oLinie = oLinie + 1;
            fOrd = xi * nSpek(1, spekNr)/60;
            % Bestimmung der der Ordnungsnummer zugehörigen Frequenz
            % aus der dem Spektrum zugehörigen Drehzahl
            fLinie = round(fOrd/df) + 1; % Berechnung der Liniennummer
            Amplitude = 0;

            if fLinie > Seitenbaender
                for linienNr = fLinie - Seitenbaender : fLinie + Seitenbaender
                    Amplitude = Amplitude + Sxx(linienNr, spekNr) ^ 2;
                end
            else
                for linienNr = fLinie : fLinie + Seitenbaender
                    Amplitude = Amplitude + Sxx(linienNr, spekNr) ^ 2;
                end
            end
            Oxx(oLinie, spekNr) = sqrt(Amplitude);
        end
    end
end
```



# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

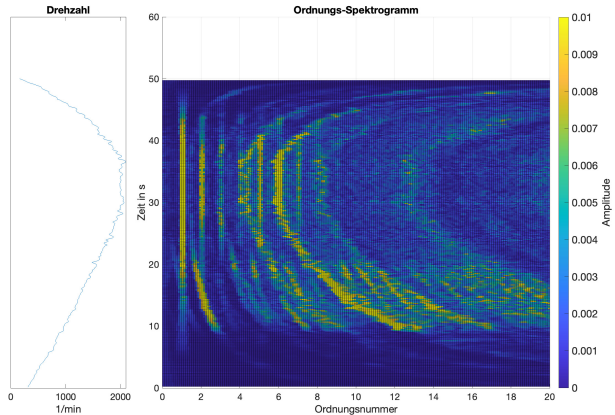
Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT





# Ordertracking OT

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

Ordertracking ist eine Fouriertransformation von Messdaten welche aus der Zeitäquidistanz in die Drehwinkeläquidistanz gebracht wurden

```
maxOrd = 20; % maximale Ordnungsnummer für die Umrechnung  
dOrd = 0.1; % Ordnungsauflösung
```

Aus der Bedingung, dass  $f_{max} = f_s/2$  ist folgt für die Übertragung in das Ordertracking  $O_{max} = O_s/2$

```
Os = ceil(2 * maxOrd + 1); % der Wert muss ganzzahlig sein
```

die Linienzahl berechnet sich analog zur FT

```
NOrd = ceil(Os / dOrd); % Linienanzahl für die OT  
O = ceil(2/3 * NOrd); % Überlappung  
wOrd = hann(NOrd); % Fenster
```

```
OFM = sum(wOrd) / NOrd; % Fenstermittelwert
```



# Ordertracking OT

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

Es liegen die Zeitstempel der Drehzahlimpulse vor. Je Umdrehung ein Impuls. Dies muss auf  $O_s$  Zeitstempel je Umdrehung erhöht werden. Basierend darauf werden danach die Messwerte interpoliert.

```
pos = 1;
for xi = 1 : length(nTime) - 1;
    OTTime(pos, 1) = nTime(xi);
    pos = pos + 1;
    delta = (nTime(xi + 1) - nTime(xi)) / Os;
    for xi2 = 1 : Os - 1
        OTTime(pos, 1) = OTTime(pos - 1, 1) + delta;
        pos = pos + 1;
    end
end
OTTime(end + 1, 1) = nTime(end);

F = griddedInterpolant(Time, Data(:, 1));
F.Method = 'spline';
OTData = F(OTTime);
```



# Ordertracking OT

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

Das eigentliche Ordertracking

```
[s, Ord, U] = spectrogram(OTData, wOrd, O, NOrd, Os);  
Oxx = 2 * abs(s/NOrd)/OFM;  
[Linien, Speks] = size(Oxx);
```

In U ist die Anzahl an Umdrehungen seit Analysestart enthalten. Mmit der Abtaste multipliziert ergibt dies den Messwertindex seit Analysebeginn, worüber aus OTTime die tatsächliche Zeit bestimmt werden kann.

Es gilt  $Index = U(\xi) \cdot O_s$

```
for xi = 1 : Speks  
    tOrd(xi) = OTTime(ceil(U(xi) * Os));  
  
end
```



# Transformation aus Frequenzspektrum

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

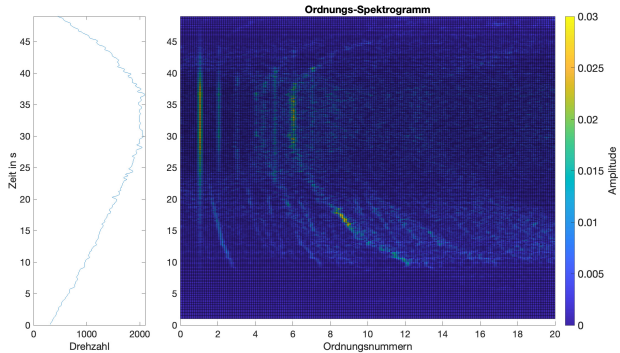
Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT







# Ordertracking OT

Ordnungsanalyse  
(Ordertracking)

Armin Rohnen

Ordnungsanalyse

Drehzahl

Sx nach Ox

Ordertracking  
OT

```
subplot(1, 4, [2, 4])  
surf(Ord, tOrd, Oxx');  
cb = colorbar;  
caxis([0 0.03])  
axis([0 20 0 tOrd(end) 0 0.05])  
view(0, 90)  
title('Ordnungs — Spektrogramm')  
xlabel('Ordnungsnummern')  
set(gca, 'FontSize', 16);  
cb.Label.String = 'Amplitude';  
cb.FontSize = 18;
```

```
subplot(1, 4, 1)  
plot(n, nTime);  
axis([0 2100 0 tOrd(end)])  
set(gca, 'FontSize', 16)  
ylabel('Zeit in s')  
xlabel('Drehzahl')
```



# Literatur und Quellen

Literatur und  
Quellen

Armin Rohnen

- ① DIN EN ISO 266:1997-08 Akustik - Normfrequenzen
- ② DIN 1311:2000-1, Schwingungen und schwingungsfähige Systeme
- ③ DIN 45662:1996-12 Schwingungsmesseinrichtung - Allgemeine Anforderungen und Begriffe
- ④ DIN EN 61260:2003-03 Elektroakustik - Bandfilter für Oktaven und Bruchteile von Oktaven
- ⑤ Möser, M. (Hrsg): Messtechnik der Akustik, Springer-Verlag, Berlin (2010)
- ⑥ Zollner, M.: Frequenzanalyse, Autoren-Selbstverlag, Regensburg (1999)
- ⑦ Kolerus, J., Wassermann, J.: Zustandsüberwachung von Maschinen, expert verlag GmbH, Renningen (2017)
- ⑧ Karl Dirk Kammeyer: Digitale Signalverarbeitung, 6. Auflage, Teubner, 2006, ISBN 3-8351-0072-6.
- ⑨ Jenne, S., Pöttner, K., Zenner, H.: Zählverfahren und Lastannahme in der Betriebsfestigkeit, Springer, Heidelberg, (2012)
- ⑩ Thomas Kuttner, Armin Rohnen: Praxis der Schwingungsmessung, Messtechnik und Signalanalyse mit MATLAB®, 2. Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden (2019)